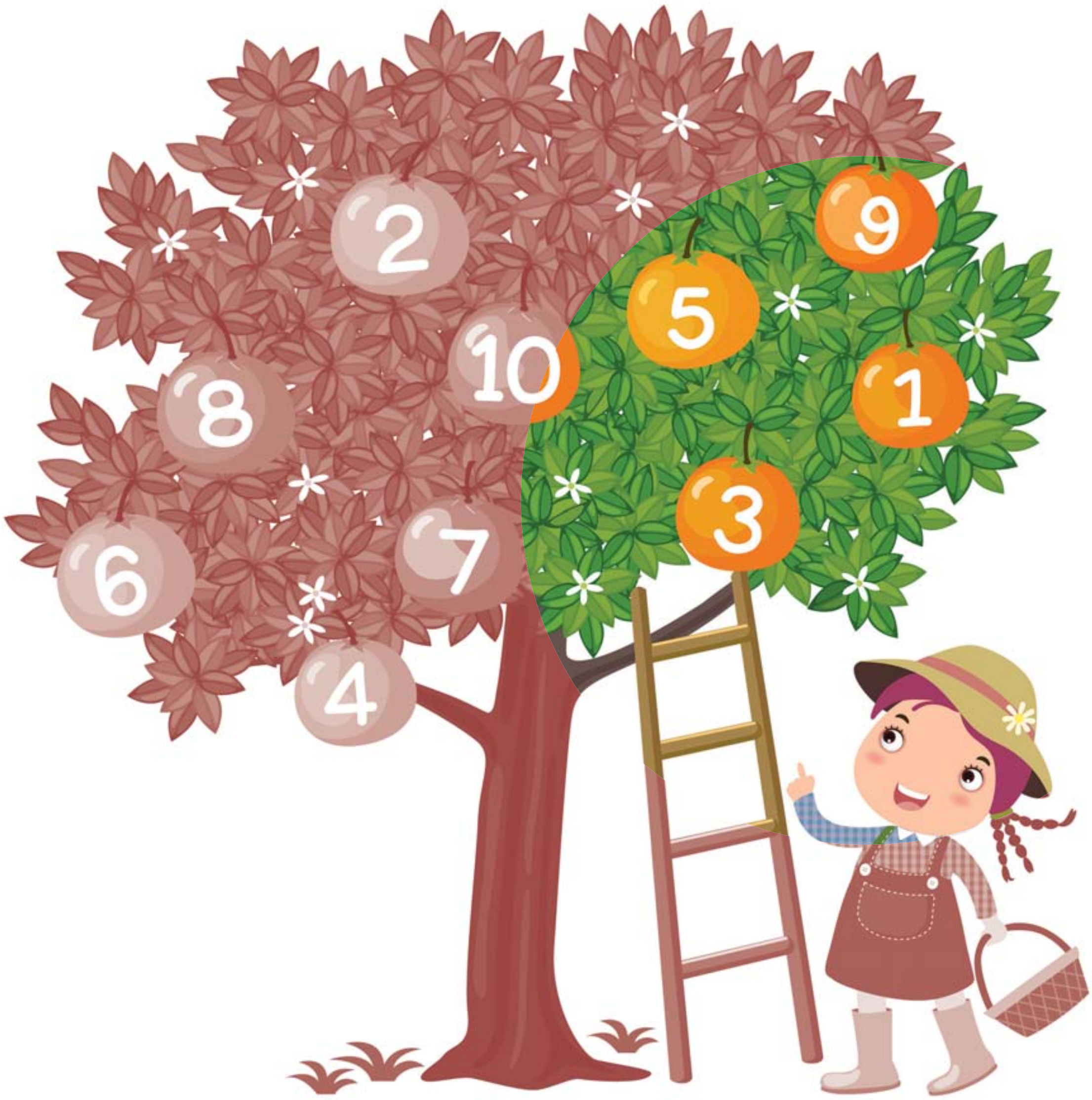
UNIR EDITORIAL

Didáctica de las matemáticas

en Educación Infantil

Blanca Arteaga Martínez y Jesús Macías Sánchez



UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA
unir

Primera edición: abril de 2016

Gran Vía Rey Juan Carlos I, 41
26002 Logroño (La Rioja)
www.unir.net

ISBN: 978-84-16602-21-6
Depósito legal: LR-387-2016
Impreso en España – *Printed in Spain*

También disponible en e-book

Índice

SEGUNDA PARTE. CONSIDERACIONES DIDÁCTICAS Y METODOLÓGICAS

PRIMERA PARTE

Desarrollo del pensamiento matemático

Capítulo 1. La construcción del conocimiento matemático en Educación Infantil

Todo profesor, independientemente de la etapa educativa en la que ejerza su profesión, enfoca y realiza su labor docente partiendo de una serie de creencias, decisiones y consideraciones en relación a lo que significa enseñar matemáticas y cómo sus alumnos adquieren los conocimientos de una manera adecuada para obtener mejores resultados. Estas ideas, la mayoría sustentadas en la experiencia personal de cada profesor, influyen de manera directa sobre la construcción del conocimiento en los estudiantes, y lo que es más importante, en la visión que los mismos vayan formándose de lo que es la matemática.

La matemática es mucho más que la aritmética, el álgebra, la geometría, la estadística, etc.; es una manera de pensar que se utiliza para resolver diversos problemas que se nos plantean en nuestra vida cotidiana, un modo de razonar; es un campo de exploración, investigación e invención en el cual se descubren nuevas ideas cada día.

Desde el mismo momento en que nos levantamos y comenzamos con nuestras tareas diarias hacemos uso de la matemática sin darnos apenas cuenta: calculamos el tiempo para ir desde casa a clase o al trabajo barajando las posibilidades de transporte que podemos tomar y estén a nuestro alcance para llegar en el menor tiempo posible y a la hora prevista; paseando por la ciudad en la que vivimos, apreciamos constantemente figuras geométricas diferentes y relaciones numéricas; y también cuando resolvemos situaciones problemáticas que se nos presentan en el entorno personal, social y laboral.

La matemática ha estado presente desde el principio de los tiempos y ha sido necesaria para desarrollar procesos y actividades, de forma simple o compleja, a lo largo de toda nuestra vida, pues desde pequeños estamos en contacto con las formas y los números, nos ubicamos en el espacio, clasificamos, contamos, realizamos multitud de procesos y desarrollamos múltiples destrezas y capacidades en relación a la matemática a través de ese afán innato de descubrir propio de los niños de Educación Infantil.

Todo esto pone de manifiesto la necesidad que tiene el ser humano de poseer una cultura matemática básica que se debe adquirir a lo largo de toda la vida, y muy destacadamente en etapa escolar, siendo importante, en esos primeros pasos que se dan hacia su descubrimiento en Educación Infantil, la manera en que el docente la transmite. Es en este sentido donde la didáctica de la matemática juega un papel fundamental. La labor de un maestro o profesor es demasiado importante como para que la acción educativa desarrollada en el aula se base exclusivamente en la percepción personal que el docente tenga tanto del proceso de enseñanza-aprendizaje como de la propia área de conocimiento a impartir.

La didáctica de las matemáticas centra su interés en todos aquellos aspectos que forman parte del proceso de enseñanza-aprendizaje (metodologías y teorías de aprendizaje, estudio de dificultades, recursos y materiales para el aprendizaje, etc.) de este campo de conocimiento, facilitando a maestros y profesores herramientas necesarias para impartir la docencia sobre unos cimientos consistentes, orientándole y guiándole en el ejercicio de su profesión en beneficio del aprendizaje de sus alumnos.

Por ello, a lo largo de este tema nos adentraremos en el estudio de la construcción del conocimiento matemático en los alumnos de Educación Infantil, acercándonos a los principales modelos de aprendizaje en matemáticas, a la comprensión e identificación de las características principales del pensamiento lógico-matemático en alumnos de estas edades y a la explicación e identificación de errores, bloques e indicios de trastornos en el aprendizaje observables en relación a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en este nivel educativo. Cabe destacar que la información se muestra de forma general, pero hemos de tener en cuenta que cada niño tiene su propio desarrollo evolutivo y que hemos de evitar generar patrones estrictos a la hora de diseñar nuestros escenarios de enseñanza.

La transmisión de la matemática y sus conocimientos comienza en la escuela y debe estar al alcance de todos desde edades tempranas, pues el deseo que se tiene de que todo ciudadano posea una cultura general incluye que parte de dicha cultura sea matemática, porque como afirmó Luis Santaló (1975) se debe educar «para el bien, para la verdad, para conocer y entender el universo» y la matemática es pieza fundamental en ello.

Figura 1.1. *Trabajo matemático en Infantil.*

1.1. Modelos en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

Es indiscutible que todo estudio en didáctica, y en didáctica de las matemáticas en concreto, precisa de un modelo de referencia que permita analizar y estudiar la adquisición de conocimientos por parte del estudiante y conocer los procesos cognitivos que tienen lugar en dicho proceso.

Es imposible concebir el proceso de enseñanza-aprendizaje de cualquier disciplina sin tener en consideración las interacciones, intervenciones y fenómenos que se producen entre sus tres principales actores:

- El **alumno**, cuyo papel es aprender aquello que ha sido establecido por la comunidad educativa, en los currícula oficiales, según su edad, nivel y desarrollo madurativo y cognitivo.
- El **saber o conjunto de conocimientos**, en nuestro caso matemáticos, que deben ser transmitidos y adquiridos por los

alumnos para su aplicación futura tanto en la vida profesional o laboral como en situaciones cotidianas del día a día.

- El **profesor**, encargado de transmitir el saber y hacer funcionar el proyecto de enseñanza de la manera más adecuada posible para que el aprendizaje se produzca de manera significativa.

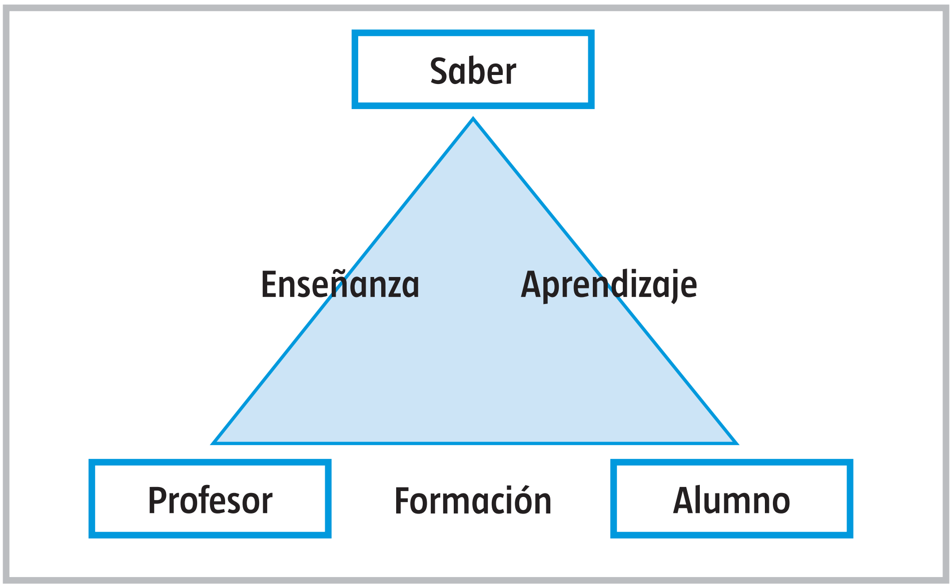


Figura 1.2. *Triángulo pedagógico.* **Fuente:** *Houssaye, 1988, p. 41.*

Es conveniente mencionar en este sentido dos elementos gráficos que pueden facilitar la comprensión del lector respecto de las interacciones que se producen en el escenario educativo: el *triángulo pedagógico*, definido en primer lugar por Houssaye (1988), que da sentido a las relaciones establecidas en términos de enseñanza, aprendizaje y formación, y el *triángulo de las relaciones de enseñanza*, establecido por Saint-Onge (1997), quizá desde una perspectiva más constructivista en términos de interacción entre los elementos.

En la fase inicial del proceso de enseñanza, el profesor se encuentra con respecto al saber en una situación privilegiada de la que el alumno no goza, pues si bien es cierto que los estudiantes ya han establecido contacto con el conocimiento antes de la enseñanza, este puede ser poco apropiado y/o limitado. No obstante, al final del proceso el alumno es capaz de mantener por sí solo una relación adecuada con el saber, pudiéndose prescindir incluso de la figura del profesor.

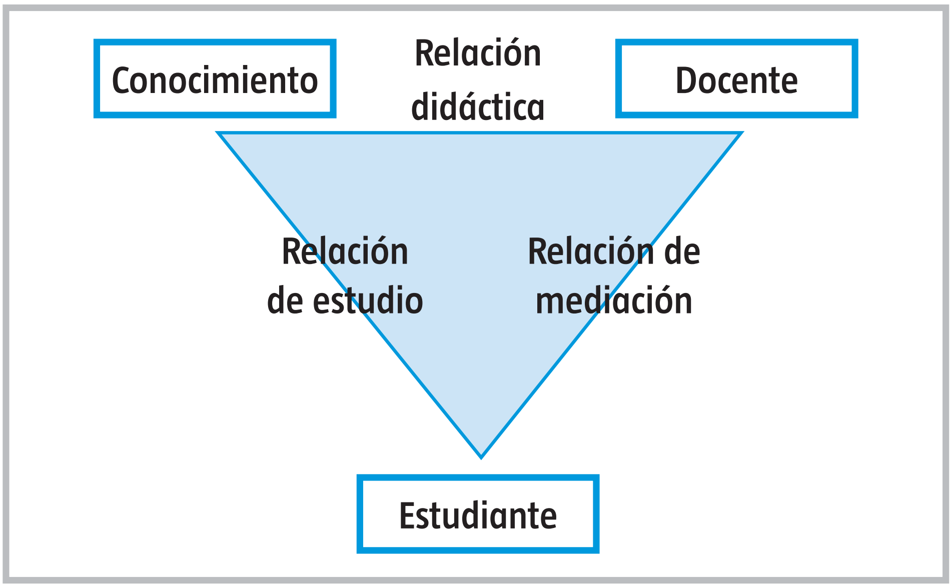


Figura 1.3. *Triángulo de las relaciones.* **Fuente:** *Saint-Onge, 1997, p. 149.*

Así, nuestra propuesta para este escenario requiere de un análisis reflexivo de cada una de sus interacciones, que podemos resumir centrándonos, en este epígrafe, en la relación existente entre el saber y el alumno, y más concretamente en las teorías de aprendizaje y en cómo el alumno construye el conocimiento.

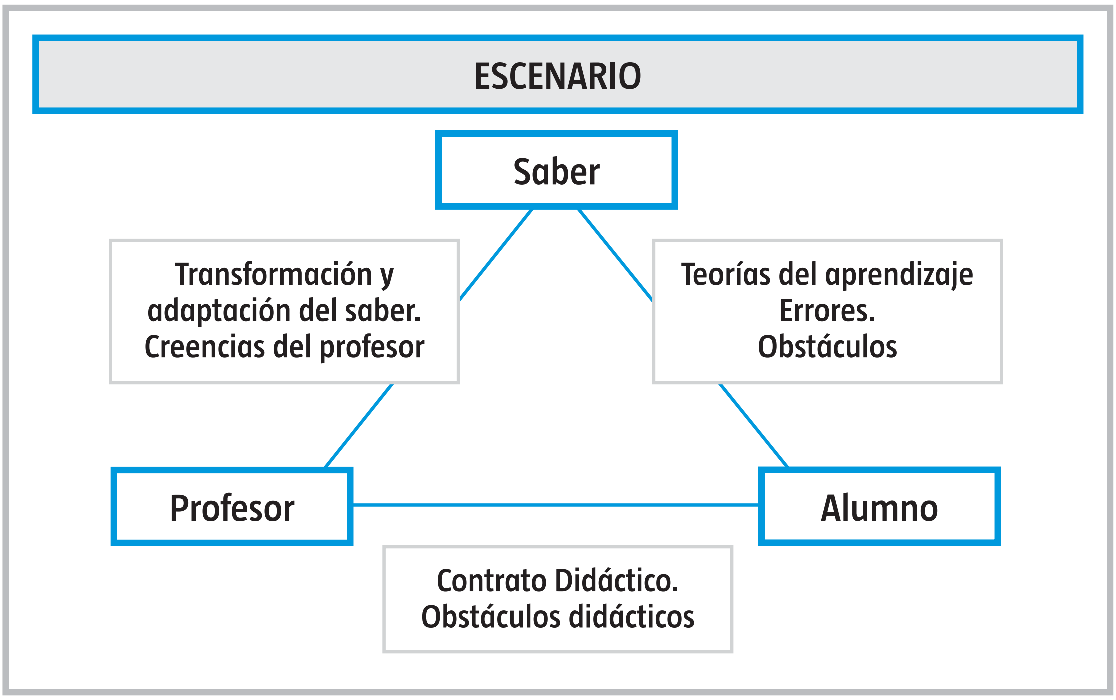


Figura 1.4. Triángulo didáctico. **Fuente:** *Chamorro, 2005, p. 42.*

La percepción, concepción y aplicación que cada sujeto tiene de las nociones matemáticas dependen del tipo de aprendizaje que haya recibido, bien sea un aprendizaje de tipo memorístico, algorítmico, en el que el alumno aprende únicamente lo que se le explica en el aula, o por el contrario, un aprendizaje que requiera del pensamiento creativo, la investigación, el descubrimiento y, en general, la construcción del conocimiento de manera más autónoma.

En matemáticas, como en cualquier otra área, el proceso de enseñanza-aprendizaje depende del conjunto de principios que se utilicen como marco de referencia para realizar la acción educativa, pues a partir de ellos podremos interpretar los comportamientos de los alumnos, así como redirigir y valorar las intervenciones y decisiones tomadas por el profesor.

En este sentido, proponemos, a continuación, la observación y análisis de dos actividades llevadas a cabo en un aula de Infantil con niños de 4 y 5 años:

Ejemplo 1: *Los números y su escritura*

Nivel: *4 o 5 años*

Material.

- Colecciones de objetos (lápices, pelotas, muñecos, etc.).
- Fichas con dibujos de colecciones de objetos en las que se pide escribir el número.
- Fichas con la escritura del número dibujada y un hueco para que el alumno represente una colección de objetos que se corresponda.

5 =

Desarrollo.

Los estudiantes han trabajado previamente la escritura hasta el número 4. El maestro quiere introducir la escritura del número 5. Toma una colección de objetos y pregunta: *¿Cuántos elementos hay en esta colección?* Y cuenta: *Uno, dos, tres, cuatro y cinco.* Seguidamente, practica con los estudiantes dos tipos de actividades:

- Formar colecciones de cinco objetos.
- Indicar el número de objetos que hay en las colecciones que les muestra.

Finalmente, trabajan con las fichas que se ha indicado en la parte del material.

Ejemplo 2: *Los números y su escritura*

Nivel: *4 o 5 años*

Material.

- Una colección de 20 platos de plástico.
- Una caja con una colección de 25 cubiertos de cada clase (cucharas, tenedores y vasos de plástico).
- Una mesa.
- Papel y lápiz para escribir los mensajes.

Desarrollo.

1ª fase: El maestro coloca los platos en una mesa e indica a los alumnos: *Tenéis que colocar los cubiertos de manera que haya uno de cada tipo por plato.* Los cubiertos se encuentran en una caja al lado de la mesa.

2ª fase: La actividad consiste en lo mismo, pero la caja con los cubiertos se encuentra alejada de la mesa. En un principio, los alumnos pueden realizar los viajes que sean necesarios, pero después el maestro debe indicar: *Debéis traer en un solo viaje los cubiertos necesarios para que haya exactamente uno por cada plato, sin que sobren ni que falten.*

3ª fase: El maestro dice: *Ahora, tú no puedes ir a buscar los cubiertos. Se lo encargarás a un compañero. Para ello, yo te daré una colección de platos y deberás indicarle a tu compañero* (que no ve cuántos platos hay) *mediante un mensaje que traiga los cubiertos necesarios para que haya exactamente uno por cada plato.*

Actividad 1

A partir de los dos ejemplos presentados, responde a las siguientes cuestiones:

- *¿Qué papel desempeña el maestro en cada actividad?*
- *¿Qué diferencia observas entre las dos actividades?*
- *¿Cómo cambia la situación de aprendizaje en cada una de las actividades? ¿Cuál te parece más adecuada?*

A través de los trabajos de investigación llevados a cabo desde el campo de la psicología y la didáctica, han surgido diferentes modelos teóricos que tratan de explicar los complejos procesos cognitivos que tienen lugar en el aprendizaje de los estudiantes y qué factores hay que tener en cuenta para que la construcción del conocimiento se produzca de manera significativa.

Todo modelo teórico, independientemente del conjunto de principios en que se base para explicar cómo se aprende en matemáticas, intentan dar respuesta a tres puntos clave:

- La **naturaleza del conocimiento**: las particularidades de cada disciplina y la manera que tenemos de acceder a los objetos de conocimiento de cada una de ellas condicionan la manera en que se les enseña y transmite a los alumnos.
- La **forma de adquirir el conocimiento**: la concepción y creencias propias que se tenga sobre cómo se produce el aprendizaje (espontáneamente, por repetición, por asociación de contenidos, por aplicación práctica apoyándose en la acción, etc.) inciden de manera directa en la práctica educativa y, por tanto, en las actividades y propuestas diseñadas para que el alumno adquiera el conocimiento.
- Lo **que significa saber**: dependiendo del modelo teórico a seguir, un estudiante que sabe es aquel que ha memorizado conceptos y es capaz de recordarlos o de aplicarlos en situaciones problemáticas.

De forma general, vamos a estudiar los dos grandes modelos teóricos de mayor difusión, tratando de explicar las cuestiones mencionadas anteriormente en relación al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas: empirismo y constructivismo.

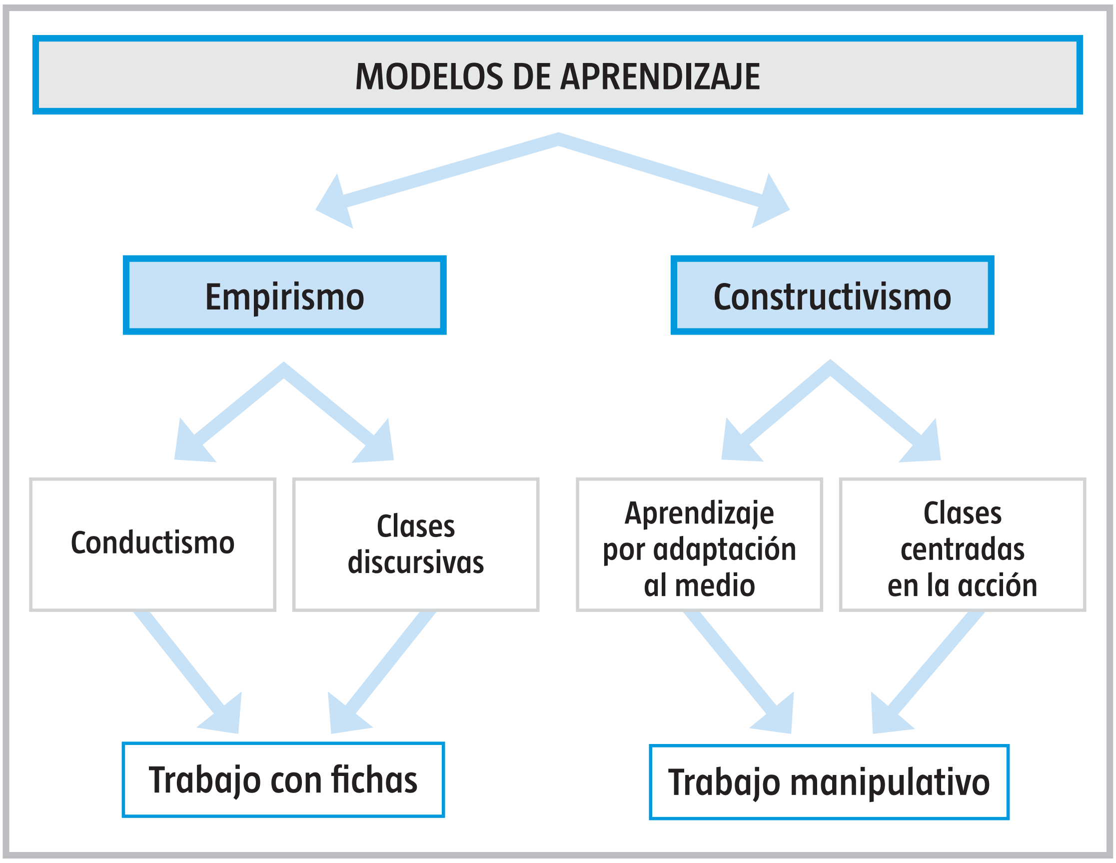


Figura 1.5. *Modelos de enseñanza-aprendizaje.* **Fuente:** *Elaboración propia.*

1.1.1. Principios del empirismo y su relación con las matemáticas

En el enfoque empirista, de manera general, no se contextualizan los saberes, pues se considera al alumno incapaz de construir conocimientos y no tiene lugar un aprendizaje significativo:

- El alumno aprende lo que el profesor explica y no aprende nada de aquello que no explica.
- El saber explicado por el profesor se imprime directamente en el alumno: trasvase de saberes.
- El error está relacionado con el fracaso, impidiendo al alumno llegar al éxito en su tarea.

En relación con el aprendizaje matemático, y centrándonos en los tres puntos clave mencionados con anterioridad, el empirismo sostiene:

Tabla 1. Aprendizaje empirista.

NATURALEZA DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	FORMA DE ADQUIRIR EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	QUÉ SIGNIFICA SABER MATEMÁTICAS
Son técnicas, algoritmos y fórmulas inconexas con la realidad.	Trabajo basado en la repetición y mecanización.	Recordar técnicas, algoritmos y fórmulas.

Fuente: *Elaboración propia a partir de Castro, Olmo, y Castro, 2002.*

Siguiendo estos principios, para el empirismo el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se sustenta en un trabajo de mimetización por parte del alumno, que actúa como agente pasivo en su aprendizaje, copiando y creyendo todo aquello que el maestro o profesor le cuenta en clase a través de un modelo de práctica docente basada en la clase magistral y discursiva, y un posterior entrenamiento mediante la resolución de actividades o fichas. Se trata de un modelo que no tiene en cuenta las diferencias individuales de los alumnos, en donde los estudiantes son los principales responsables de su fracaso. En el caso concreto de la Educación Infantil, se considera que los alumnos llegan como recipientes vacíos, sin ningún tipo de bagaje en lo que a conocimiento se refiere. Este tipo de modelo teórico, y por tanto la acción educativa en matemáticas que se sustenta en él, da lugar a la aparición del fenómeno ostensivo.

El fenómeno de la **ostensión** consiste en definir un concepto a través y con único apoyo de una representación particular y prototípica de dicho objeto de conocimiento, de modo que recae en el alumno la responsabilidad de establecer las relaciones entre los conceptos enseñados y las representaciones con las que estos objetos se relacionan, lo que da lugar a la aparición de errores en el estudiante. Veamos un ejemplo:

Maestro: *Esta figura es un cuadrado*

Maestro: *¿Cuáles de estas figuras son cuadrados?*

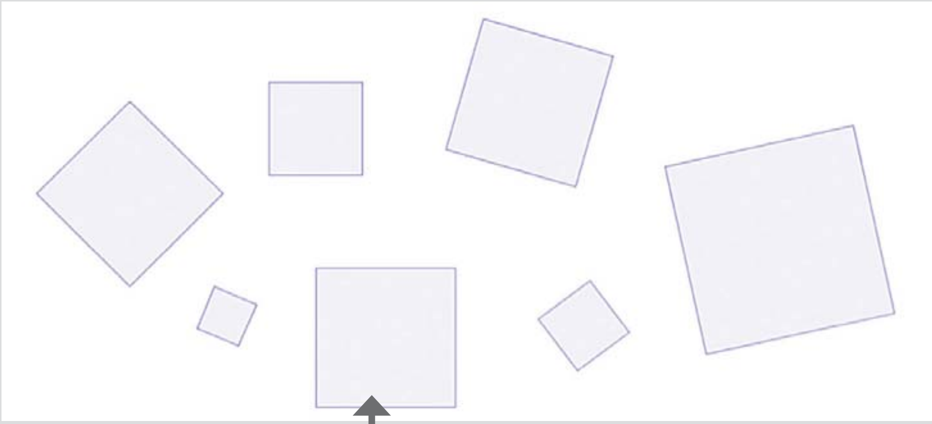


Figura 1.6. *La ostensión en el concepto de cuadrado.* **Fuente:** *Elaboración propia.*

La definición, ostensiva, dada por el maestro, en la que ha explicado el concepto de cuadrado mediante una única representación, prototípica, sin acompañarla de una explicación de las características que permiten identificar la figura geométrica —por ejemplo, tener cuatro lados iguales— genera que al mostrarles otros ejemplares muy diferentes entre sí —demasiado pequeños, inclinados, orientados como un rombo…— no los identifiquen como cuadrados.

La ostensión es necesaria para explicar ciertos conceptos o características de los objetos matemáticos que se pretende que el alumno adquiera, pero es fundamental completar la práctica ostensiva con otro tipo de métodos de enseñanza y aprendizaje.

Todo lo aquí tratado nos permite concluir que el modelo de aprendizaje empirista puede explicar formas de aprendizaje primarias basadas en la simple memorización, en donde la verdadera comprensión juega un papel secundario, motivo por el cual no es satisfactorio ni suficiente para que se produzca una aprehensión verdadera de los conocimientos.

1.1.2. Hipótesis del constructivismo y su relación con las matemáticas

En contraposición al modelo empirista, encontramos la teoría constructivista, que proporciona un enfoque más exacto en relación a cómo se produce el aprendizaje mediante la reformulación y reestructuración de los conceptos previos ya adquiridos por los sujetos, adaptándolos a nuevas circunstancias y situaciones problemáticas que dan lugar a la construcción de nuevos conocimientos. En relación con el aprendizaje matemático, el constructivismo considera que:

Tabla 2. Aprendizaje constructivista.

NATURALEZA DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	FORMA DE ADQUIRIR EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO	QUÉ SIGNIFICA SABER MATEMÁTICAS
Conjunto de conceptos que guardan relación entre sí, conexos con la realidad.	Adaptación al medio, mediante la reestructuración o reformulación de nociones previas.	Establecer relaciones entre conceptos y aplicarlos a situaciones problemáticas.

Fuente: *Elaboración propia a partir de Castro, Olmo, y Castro, 2002.*

Dicho modelo considera que el aprendizaje de ciertos conocimientos supone una actividad propia del sujeto, requiriendo tiempo para afianzarse y consolidarse. Parte de la idea de que las capacidades, las destrezas y el desarrollo cognitivo de cada niño son distintos, y por tanto hay que tenerlo en cuenta, pues no puede darse un aprendizaje significativo si previamente no se tienen los conocimientos que sirvan de cimiento para la construcción de los nuevos.

El enfoque constructivista se apoya principalmente en cuatro hipótesis, fundamentadas en los trabajos de Piaget y Vygotsky, que resumimos a continuación:

1ª. El aprendizaje se apoya en la acción.

Particularmente en Educación Infantil, los estudiantes construirán el conocimiento matemático tocando y manipulando recursos y materiales que les permitirán comprender, construir y asimilar conocimientos propios del pensamiento lógico-matemático mediante la acción concreta sobre objetos reales y la utilización de los sentidos:

Ejemplo 3: *Composición y descomposición de números*

Nivel: *Educación Infantil 5 años*

Material.

- Regletas de Cuisenaire

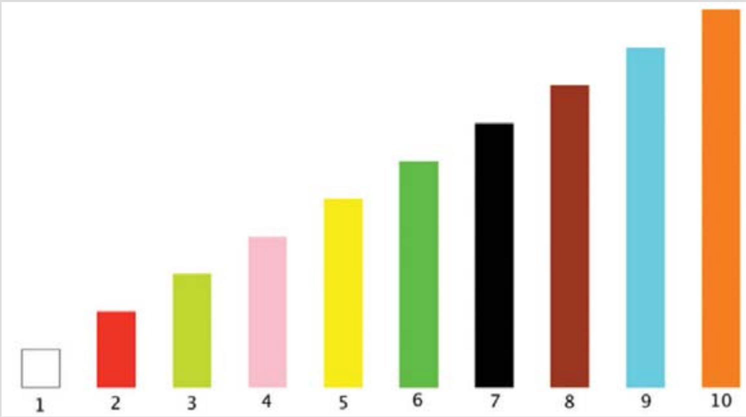


Figura 1.7. *Regletas de Cuisenaire. Fuente: Elaboración propia.*

Desarrollo.

1ª fase: El maestro proporciona una regleta de cada valor y más de 10 regletas de valor 1 a cada pareja de alumnos e indica:

Esta regleta (mostrando la regleta blanca) *representa la número 1. ¿Podéis indicar el valor que representan el resto de regletas?*

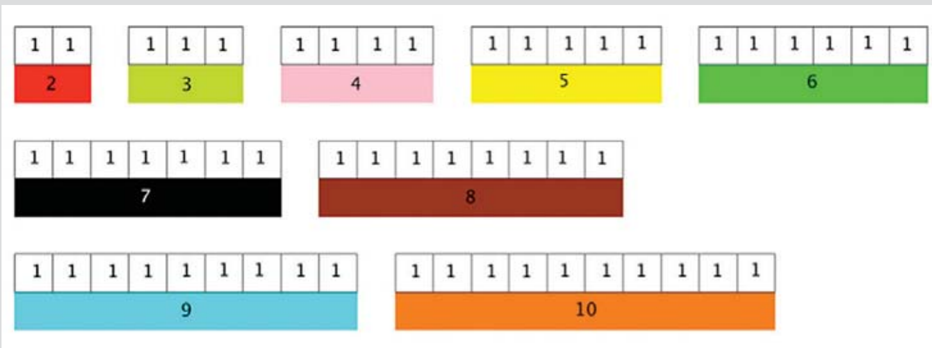


Figura 1.8. *Descomposición en unidades con regletas.*

2ª fase: Una vez han identificado el valor de cada regleta, se les proporcionan más regletas de cada valor. El maestro hace preguntas del siguiente estilo:

¿Podéis representar el número 8 con tan solo tres regletas, sin repetir ninguna ni la regleta amarilla?

Figura 1.9. *Descomposición del 8 con 3 regletas.*

¿Cuál es el número mínimo de regletas que podéis utilizar para representar el número 8?

Figura 1.10. *Descomposiciones del 8 con 2 regletas.*

3ª fase: El maestro proporciona una regleta (por ejemplo la del 9) y pregunta:

¿Podéis representar el número 5 utilizando la regleta del 9 y otra regleta?

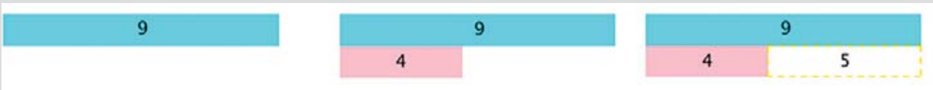


Figura 1.11. *Inicio a la resta por descomposición en 2.*

¿Podéis representar el número 2 utilizando la regleta del 9, dos regletas más y sin utilizar la regleta del 2?

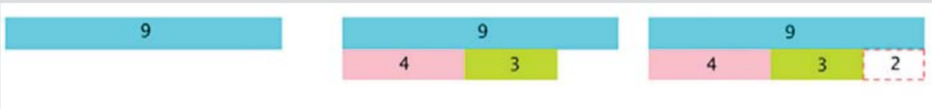


Figura 1.12. *Inicio a la resta por descomposición en 3.*

2ª. La adquisición de conocimientos pasa por estados de equilibrio y desequilibrio en los cuales los conocimientos anteriores se ponen en duda.

El aprendizaje no consiste en una simple memorización y acumulación de saberes a partir de la nada, sino que mediante la adaptación y reorganización de las nociones previas que se poseen, se forman e integran los nuevos conocimientos:

Maestro: *Jugamos a que digo un número y me dices que te viene a la cabeza. Número diez.*

Niña: [Contentísima, muestra las manos abiertas] *Los dedos de las manos.*

Maestro: *Número uno.*

Niña: *Mi nariz.*

Maestro: *Número cero.*

Niña: *Los niños que hay aquí. Estoy yo y después cero.*

Maestro: *¿Qué significa cero?*

Niña: *Que no hay nada* [muestra los puños cerrados]. *¿Ves? No hay nada.*

Maestro: *¿Tú sabes cómo se escribe el diez?*

Niña: *Con un cero y un uno.*

Maestro: *¿Entonces cero significa nada?*

Niña: *No, cero significa mucho.*

3ª. Se conoce en contra de los conocimientos anteriores.

El aprendizaje no solo tiene lugar mediante la reorganización de conceptos asimilados previamente, sino también a partir de una ruptura radical con respecto a lo que creemos saber, de modo aprendemos en contra de lo que ya sabíamos:

Maestro: *Carlos escribe el número 8*

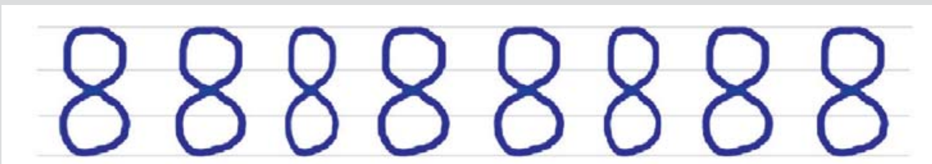


Figura 1.13. *Conjunto de ocho ochos.*

Carlos construye una colección de 8 ochos, de modo que la representación analógica de la colección (crear una colección de ocho elementos) constituye un obstáculo para el aprendizaje de la numeración posicional.

4ª. Los conflictos cognitivos entre miembros de un mismo grupo social pueden facilitar la adquisición de conocimientos.

Siguiendo a Vygotsky, el debate, resolución de conflictos e interacción entre iguales, en este caso entre niño-niño, favorece el aprendizaje:

Conflicto: *¿Qué es un rombo?*

Maestro: *Un rombo…*

Cristina: *Un rombo yo no sé qué es.*

Diego: *Es un cuadrado dado la vuelta.*

Maestro: *Un rombo no es más que un rombo hasta que le añades una cuerda, una cola al viento y muchos niños volándola.*

Varios: *¡Hala, una cometa!*

Maestro: *Dice Diego que el rombo es el cuadrado dado la vuelta* (Unos dicen que sí, otros que no).

Diego: *Esto es un cuadrado* (hace la forma con los dedos). *Y le falta la parte de arriba* (porque con los dedos solo puede formar una «U»). *Y, si lo giramos, es un rombo.*

Carmen: *No, eso* **(el rombo)** *es más grande. Tiene los picos más así, más grandes, porque tiene los lados más estirados.*

En resumen, en el constructivismo «el aprendizaje se considera como una modificación del conocimiento que el alumno debe construir por sí mismo y que el maestro solo debe provocar» (Brousseau, 1994, p. 66). Luego, el cometido principal del maestro, y hacía ahí debe enfocar su práctica educativa, es diseñar situaciones de aprendizaje de aula, que den lugar a la construcción de nuevos conocimientos por parte de los estudiantes.

1.2. Características del pensamiento lógico-matemático

Desde edades tempranas, el niño interactúa con el medio que le rodea a través de sus sentidos, estableciendo en su mente una serie de relaciones y conexiones que le permiten comprender la realidad que le rodea. Estas relaciones poco a poco se van constituyendo en conocimientos cuando se generalizan tras volver a ser vivenciadas o aplicadas en nuevas experiencias.

En el caso concreto de la construcción del pensamiento lógico-matemático en niños de Educación Infantil, los conocimientos se van adquiriendo a través de acciones y prácticas relacionadas con el número y la ubicación en el espacio y en el tiempo, que se va fortaleciendo a través del desarrollo de cuatro capacidades básicas:

- **La observación:** es fundamental presentar a los alumnos tareas en las que, de manera autónoma y guiados con sumo cuidado por el maestro, sean capaces de centrar la atención en aquellas propiedades, características o fenómenos que queremos que perciban, sin forzar por nuestra parte dicho acto.
- **La imaginación:** es necesario fomentar la creatividad de los alumnos mediante actividades que les permitan desarrollar múltiples y diferentes acciones, del mismo modo que puede ocurrir en el trabajo matemático.
- **La intuición:** entendida como la capacidad para anticipar los resultados que se pueden obtener de una acción que se vaya a realizar posteriormente.
- **El razonamiento lógico:** se debe potenciar la capacidad de los alumnos en relación a la obtención de unas conclusiones a partir de ideas o resultados previos considerados ciertos.

Estas cuatro capacidades básicas no aparecen de manera aislada en la construcción de pensamiento lógico-matemático en estas edades, sino que requiere que se vinculen con la construcción de los conceptos matemáticos más básicos: el número, la geometría y el espacio, así como las magnitudes y su medida.

En todo este proceso, juega un papel trascendental la naturaleza abstracta de los objetos matemáticos, pues a diferencia de lo que ocurre con otras áreas de conocimiento, no existen en la realidad, teniendo que recurrir a la representación o simbolización para poder trabajar con ellos.

Jean Piaget, en sus trabajos sobre la formación del símbolo y el papel que juega en el desarrollo cognitivo del niño, defiende que cuando los niños recuerdan hechos y objetos pueden comenzar a formar y utilizar representaciones de cosas que no están presentes en su entorno.

Hacia el año y medio o dos, es decir, al finalizar el periodo que denomina sensomotor, los niños comienzan a asociar y representar un «significado» cualquiera (objeto, concepto, acontecimiento, etc.) a través de un «significante» (imagen, lenguaje, gesto simbólico, etc.). Por ejemplo, al dibujar una naranja, un balón o una rueda, que en este caso constituirían cada uno de ellos lo que llamamos significado, representan una línea cerrada, siendo dicha representación el significante, que utiliza de manera general al esbozar cualquier objeto que en su mente se evoca como algo redondo.

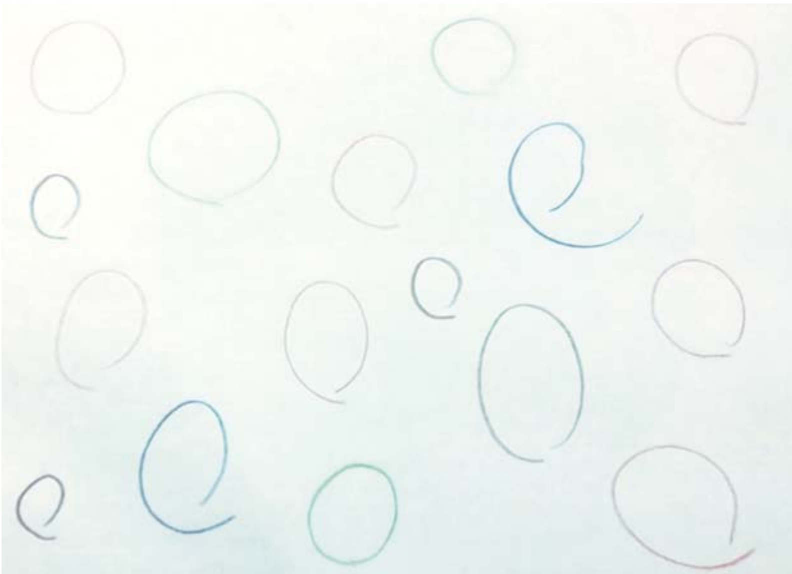


Figura 1.4. *Representación de objetos redondos.*

Es a partir de ese momento cuando el pensamiento lógico-matemático comienza a formarse como un todo del que forman parte los siguientes aspectos:

- Capacidad para generar y construir ideas.
- Utilización de representaciones que evoquen y simbolicen esas ideas y la interpretación que se hace de las mismas.
- Capacidad para comprender el entorno más profundamente a partir de las nociones adquiridas.

No será hasta los 4 años aproximadamente cuando el niño empiece a reproducir los objetos mediante representaciones más fieles a la realidad, lo que indica un desarrollo en el uso de la simbolización y por tanto del pensamiento lógico-matemático.

El trabajo con la representación y designación es primordial en Educación Infantil. Debe enfocarse con cuidado para que los niños sean capaces de generar y utilizar los símbolos, los dibujos, los trazos, etc., necesarios en cada situación que se les plantee, evitando confundir el significado representado con el significante utilizado, es decir, el objeto que representan con la representación que emplean. Esta cuestión es de suma importancia en la formación del conocimiento matemático, pues en diversas ocasiones utilizamos recursos como:

El uno es un soldado haciendo la instrucción,
el dos es un patito que está tomando el sol.
El tres, una serpiente, no cesa de reptar,
el cuatro es una silla que invita a descansar.

Permiten a los niños relacionar una determinada forma con un nombre, pero en ningún momento se está favoreciendo el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, pues nada tiene que ver la descripción que hace la canción con el verdadero sentido matemático de los números que en ella aparecen.

Por ello, para que tenga lugar en el alumno de estas edades una verdadera formación del conocimiento lógico-matemático que tome en consideración todo lo mencionado anteriormente, es necesario plantear acciones educativas que contribuyan de manera significativa al desarrollo de las capacidades de representación e interpretación.

1.3. Errores y obstáculos en el aprendizaje matemático. Indicios de trastornos específicos de aprendizaje

Un elemento fundamental que aparece en la construcción del aprendizaje es el error. El tratamiento que los maestros hacen del error puede estar relacionado con el fracaso escolar, especialmente en matemáticas, cuando se ve como algo negativo de lo que no se puede sacar partido.

Si en una clase el error no está permitido, o es siempre sancionado, el maestro se perderá una fuente de información adicional de enorme valor pedagógico. El error manifiesta las concepciones erróneas o incompletas, las construcciones defectuosas de conceptos o relaciones, o las lagunas de conocimiento. Para orientar las actividades de aprendizaje es importante tomar en consideración el error.

En lugar de entender el error como algo que el alumno no sabe hacer, debería tomarse como indicio de que sabe alguna cosa incorrecta o incompleta o que presenta lo que podría ser algún tipo de trastorno específico de aprendizaje (APA, 2013), cuya atención temprana puede facilitar la ayuda en su aprendizaje.

Esto no quiere decir que el profesor no deba actuar ante el error o que una clase funcione bien cuando el error aparece constantemente. El maestro debe plantearse una didáctica que tome en cuenta los errores de los alumnos.

Desde un punto de vista pedagógico, y siguiendo a Godino (2004), el error se puede clasificar en cuatro categorías:

1. Errores de conocimiento: no se conoce una definición, una regla…
2. Errores de saber hacer: no se usa correctamente una técnica, un algoritmo… No se sabe utilizar un instrumento.
3. Errores debidos a la utilización no pertinente de conocimientos o técnicas: no reconocimiento de situaciones en las que hay que utilizar determinadas nociones.
4. Errores de lógica o razonamiento: confusión entre ideas iniciales y conclusión, mal encadenamiento de cálculo…

Muchos errores pueden ser evitados si el maestro elige una progresión adecuada para aproximarse a un concepto, de forma que determinadas actividades ayuden a los alumnos a revisar los errores cometidos. La resolución de problemas desempeña un papel importante, dado que puede facilitar factores explicativos del error en diferentes pasos o estrategias puestos en juego durante el proceso, a la vez que «ofrecen situaciones del mundo real, que motivan a los niños y facilitan la aplicación de sus habilidades matemáticas» (Bermejo, Lago, Rodríguez y Pérez, 2000, p. 44).

La técnica de hacer al alumno repetir numerosos ejercicios del mismo tipo del que ha cometido un error, además de ser ineficaz la mayoría de las veces, corre el riesgo de fijar el error si el alumno no ha reconocido la causa de este.

El trabajo en grupo favorece las interacciones horizontales entre los alumnos, y si el error suele ser admitido como un elemento más, esta interacción advierte al alumno de su error y le ayuda a corregirlo mediante la confrontación con las concepciones de los otros. Así se ayuda a desdramatizar y despersonalizar el error, evitando el frecuente sentimiento de culpabilidad al que se ven sometidos los alumnos en matemáticas.

Si el error se considera un elemento más del proceso, se contribuye a reforzar la autoestima, siempre frágil en su relación con las matemáticas, del alumno. La admisión de los errores propios y ajenos ayuda a crear un clima de tolerancia y comprensión, contribuyendo a la consecución de valores: «debemos huir del empirismo que relaciona error con fracaso. Debemos atender no solo a los resultados, sino sobre todo a los procesos, a las estrategias que los niños y niñas han sido capaces de poner en juego» (Ruiz-Higueras y García, 2011, p. 63).

De manera general, los errores cometidos por los alumnos pueden ser debidos a dos causas generales: la existencia de obstáculos en el sentido didáctico, por un lado, y la existencia de trastornos específicos del aprendizaje, por otro.

1.3.1. Los obstáculos

Desde la perspectiva de la didáctica de las matemáticas, y en particular siguiendo los trabajos realizados por el francés Guy Brousseau, el error no está únicamente relacionado con la falta de un conocimiento o procedimiento por parte del estudiante, sino que también se produce por el efecto que causa un conocimiento anterior que era válido para afrontar determinadas tareas, pero que ahora se muestra como insuficiente ante nuevas situaciones.

Cuando se produce este fenómeno, se dice que los errores son causados por obstáculos, caracterizados por Brousseau (1998) como sigue:

- Siempre se trata de un conocimiento, no de una ausencia de él.
- Dicho conocimiento permite al alumno producir respuestas correctas en determinadas situaciones o problemas.
- Dicho conocimiento se muestra como insuficiente y da lugar a respuestas erróneas en ciertas situaciones.
- Los errores producidos por estos obstáculos no son esporádicos sino muy persistentes y resistentes a la corrección.
- Su rechazo puede provocar el aprendizaje de otro nuevo conocimiento.

Esta clasificación se completa con el origen que tengan estos obstáculos, atendiendo a cuatro categorías:

- **Ontogenéticos**: ligados al desarrollo psicogenético de los niños; se resuelven con la edad. Un ejemplo de ello sería cuando se trata de explicar el concepto de cuadrado y rectángulo a niños cuyo desarrollo cognitivo les impide todavía ver uno y otro como objetos distintos, pues ellos perciben ambos como figuras de cuatro lados.
- **Culturales**: fruto de la cultura. Por ejemplo, escribir de izquierda a derecha para las operaciones encadenadas.
- **Didácticos**: son debidos a las decisiones que toma el profesor o el propio sistema educativo con respecto a algunos conocimientos. Está íntimamente ligado con la práctica educativa y la manera en que se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, la presentación del algoritmo de la suma de manera mecánica, sin comprender lo que subyace detrás, genera gran cantidad de errores en los estudiantes.
- **Epistemológicos**: son los obstáculos propios de la construcción del conocimiento.

Dichos obstáculos, y en particular los de origen didáctico, potencialmente productores de errores, pueden ser detectados con antelación si se realiza previamente un diagnóstico y reflexión de la situación, de modo que nos permita enfocar la práctica educativa minimizándolos en la mayor medida.

1.3.2. Trastornos específicos del aprendizaje

Cuando un niño tiene problemas para procesar información, entender lo que se le dice, seguir ciertas instrucciones, leer y comprender ciertas palabras, realizar cálculos sencillos o resolver problemas matemáticos, puede ser debido a la existencia de algún tipo de trastorno específico del aprendizaje.

Un trastorno de aprendizaje o dificultad de aprendizaje (DEA) se define como:

> Grupo heterogéneo de alteraciones que se manifiestan en dificultades en la adquisición y uso de habilidades de escucha, habla, lectura, escritura, razonamiento o habilidades matemáticas. Estas alteraciones son intrínsecas al individuo debido a disfunciones del sistema nervioso central y pueden tener lugar a lo largo de todo el ciclo vital. Problemas en conductas de autorregulación, percepción social e interacción social pueden coexistir con las DEA, pero no constituyen en sí mismas una DEA. Aunque las DEA pueden coexistir con otro tipo de *handicap* (impedimentos sensoriales, retraso mental, trastornos emocionales) o con influencias extrínsecas (tales como diferencias culturales, instrucción inapropiada o insuficiente), no son resultado de aquellas condiciones o influencias. (NJCLD, 1994, p. 65)

Este tipo de trastornos pueden ir asociados a alteraciones propias del desarrollo neurológico, factores genéticos y madurativos, así como a factores afectivos-emocionales, bajo autoconcepto y autoestima, falta de habilidad social, hechos estos que pese a no ser frecuentes en edades tan tempranas no podemos dejar de mencionarlos.

En alumnos de edades comprendidas dentro de la etapa educativa en que nosotros nos ubicamos, es prematuro hablar de trastornos, pero sí es cierto que podemos detectar determinados indicios que nos indican que un niño pueda manifestar un determinado problema de aprendizaje.

Presentamos a continuación los principales campos en los que podemos percibir esos primeros indicios:

- **Lenguaje**: desarrollo del lenguaje hablado lento, problemas para seguir ideas en asambleas, problemas para procesar y entender instrucciones.
- **Organización viso-espacial**: los alumnos presentan problemas para ubicarse y orientarse en el espacio, tienen falta de coordinación al caminar o la direccionalidad confusa.
- **Organización de secuencias temporales**: percepción del tiempo inadecuada, confundiendo, por ejemplo, el ayer con el hoy y el mañana, o la tarde con la mañana y la noche.
- **Memoria**: percepción deficiente, problemas para recordar lo que le acaban de decir, distracción con facilidad y pérdida de objetos con frecuencia.

Cuando algunos de estos comportamientos se producen de manera reiterada y continuada, el niño puede estar manifestando los primeros síntomas de lo que más tarde se conformará como un trastorno específico de aprendizaje, como puede ser la dislexia (trastorno que afecta a la lectura), la disgrafía (trastorno de la escritura) o la discalculia (dificultades relacionadas con el desarrollo de habilidades matemáticas).

Como maestros, debemos estar atentos a las señales que indican la posible presencia de un problema de aprendizaje en nuestros alumnos, pues si son detectados con tiempo, la evaluación de los niños llega a ser satisfactoria al aplicar medidas de intervención temprana de la que forme parte toda la comunidad educativa: pedagogos, psicólogos, psicopedagogos, maestros y familia. De esta manera, además, conseguiremos mermar la sensación de frustración e incapacidad que puede rodear a los niños que no fueron diagnosticados a tiempo.

Bibliografía

Aguiar, M. V. y Cuesta, H. (2009). Importancia de trabajar las TIC en Educación Infantil a través de métodos como la webquest. *Pixel-Bit: Revista de Medios y Educación*, 34, 81-94.

Alonso, M., Gil, D. y Martínez-Torregrosa, J. (1996). Evaluar no es calificar: la evaluación y la calificación en una enseñanza constructivista de las ciencias. *Investigación en la Escuela*, 30, 15-26.

Alsina, Á. (2006). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos: para niños y niñas de 6 a 12 años*. Madrid: Narcea.

Alsina, C. (2006). La matemática hermosa enseña con el corazón. *Sigma: Revista de Matemáticas= matematika aldizkaria*, *29*, 143-150.

Alsina, C., Burgues, C. y Fortuny, J. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría. Matemáticas, cultura y aprendizaje, 12*. Madrid: Síntesis.

Alsina, C., Fortuny, J. y Pérez, R. (1997). ¿Por qué *geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid: Síntesis.

Andreu, M. y Godall, P. (2012). La importancia de la educación artística en la enseñanza obligatoria: la adquisición de las competencias básicas de primaria en un centro integrado de música. *Revista de Educación*, 357, 179-202.

APA (American Psychiatric Association) (2013). *DSM-V: Guía de consulta de los criterios diagnósticos*. Washington DC: American Psychiatric Publishing.

Arroyo, V. (2009). Los sentidos y el aprendizaje. *Revista Digital Enfoques Educativos, 40*, pp. 4-9.

Arteaga, B. y Calderero, J. F. (2014). Editorial: La educación personalizada como concepción educativa. *Revista Conect@2, 4*(9), 5-6.

Aubrey, C. (1993). An Investigation of the Mathematical Knowledge and Competencies Which Young Children Bring into School. *British Educational Research Journal, 19(1),* 27- 41.

Barba, C. (2002). La investigación en Internet con las WebQuest. *Comunicación y Pedagogía*, *185*, 62-66.

Baroody, A. J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños. Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial*. Madrid: Visor.

Bermejo, V., Lago, M. O., Rodríguez, P. y Pérez, M. (2000). Fracaso escolar en matemáticas: cómo intervenir para mejorar los rendimientos infantiles. *Revista de Psicología General y Aplicada: Revista de la Federación Española de Asociaciones de Psicología*, 53(1), 43-62.

Bkouche, R. (1991). *Faire des mathemátiques: le plaisir du sens*. Paris: Armand Colin.

Boule, F. (1994). *Manipular, organizar, representar. Iniciación a las matemáticas.* Madrid: Narcea.

Briand, J. (1993). *L'enumération dans le mesurage de collections.* [Tesis Doctoral]. Université de Bordeaux.

Bricker, D., Capt, B. y Pretti-Frontczak, K. (2002). *Test [for] Birth to Three Years and Three to Six Years. Assessment, Evaluation, and Programming System for Infants and Children (AEPS).* Baltimore: Brookes Publishing Co.

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des Phénomènes d'enseignement des Mathématiques*. [Tesis doctoral]. Universidad de Bordeaux.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau. G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra e I. Saiz, (Eds.), *Didáctica de las matemáticas*, pp. 65-95. Buenos Aires: Paidós.

Canals, M. A. (2001). *Vivir las matemáticas*. Barcelona: Octaedro.

Carpintero, E., Pastor, L. y García, M. (2011). *Respuestas de la investigación a viejas y nuevas cuestiones en Educación Infantil* (No. 8). Madrid: Ministerio de Educación.

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L. y Acosta, M. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Castro, E., Olmo, M. A. y Castro, E. (2002). *Desarrollo del pensamiento matemático infantil*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., y Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth: Heinemann.

Castellanos Sánchez, A., Arteaga Martínez, B. y Sánchez Romero, C. (2015). Un repositorio de webquest de maestros de Educación Infantil en formación: catalogación y usabilidad. *Edutec. Revista Electrónica de Tecnología Educativa,* 52. Recuperado de *http://www.edutec.es/revista/index.php/edutec-e/article/view/303.*

Chamorro, M. C. (1991). *El aprendizaje significativo en el área de las matemáticas*. Madrid: Alhambra Longman.

Chamorro, M. C. (2003). Matemática para la cabeza y las manos: la enseñanza de la geometría en la Educación Primaria. Conferencia presentada en *Ciclo de Conferencias Organizado por la Editorial Proyecto Sur y el Centro Regional de Innovación y Formación (CRIF) «Las Acacias»*. Madrid, España.

Chamorro, M. C. (2005). *Didáctica de las Matemáticas en Educación Infantil*. Madrid: Pearson Educación.

Chevallard, Y. (1998). *La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique. Traducción de: *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. París: La Pensée Sauvage.

Clements, D. H. (1984). Training effects on the development and generalization of piagetian logical operations and knowledge of number. *Journal of Educational Psychology,* 5, 766-776.

Cockcroft, W. (1985). *Informe Cockcroft. Las matemáticas, sí cuentan*. Madrid: MEC.

Cruz, E. (2010). *Educação matemática no 1º ao 3º anos escolares das escolas Waldorf*. X Encontro Nacional de Educação Matemática, Cultura e Diversidade. Salvador. Brasil.

D'Amore, B. (1998). Objetos relacionales y registros representativos distintos: dificultades cognitivas y obstáculos. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 15*, 63-78.

D'Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 27, 51-76.

D'Amore B. (2003). The noetic in mathematics. *Scientia Pedagogica Experimentalis*, *39 (1)*, 75-82.

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *UNO, 35*, 90-106.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME, Número Especial 1*, 177-195.

De Castro, C. y Escorial, B. (2006). El juego de construcción: una experiencia matemática para la escuela infantil. *Indivisa Revista*, *15*, 15-17.

De Castro, C. (2007). La evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 11, 59-77.

De Escalona, F. y Noriega, M., (1974). *Didáctica de la matemática en la escuela primaria*. Buenos Aires: Kapelusz.

Dehaene, S. (2000). Les bases cérébrales de l'intuition numérique. Texto presentado en la *167º conférence de l'Université de tous les savoirs*, París, Francia.

Dehaene, S. (2005). Les bases biologiques de l'aritmétique élémentaire. *Pour la Science, 330*, 70-76.

Deliyianni, E., Gagatsis, A., Kalogirou, P. y Kusniak, A. (2011). Towards comprehensive theoretical model of students' geometrical figure understanding and its relation with proof. *Proceedings VII of European Research in Mathematics Education CERME, 7*, 598-607.

DeLoache, J. S. y Marzolf, D. (1992). When a picture is not worth a thousand words: Young children's understanding of pictures. *Cognitive Development, 7*, 317-329.

Díaz, F. (2005). *Enseñanza situada: Vínculo entre la escuela y la vida*. México: McGraw Hill.

Díaz, F. y Díaz, J. F. (2007). Modelo para autoevaluar la práctica docente de los maestros de Infantil y Primaria. *Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, *22*, 155-202.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson. O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Cerdanyola: Editorial Labor, S.A.

Dienes, Z. y Golding, E. (1980). *Exploración del espacio y práctica de la medida*. Barcelona: Teide.

Dodge, B. (1995). *Some thoughts about WebQuests*. Disponible en: *http://webquest.sdsu.edu/about_webquests.html*.

Dodge, B. (2002). Tareonomía del webquest: una taxonomía de tareas. Recuperado el 31/01/2016 de: *http://www.eduteka.org/articulos/Tema11*.

Doménech, J. y Viñas, J. (1997). *La organización del espacio y del tiempo en el centro educativo*. Barcelona: Graó.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives, 5,* 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En E. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une demarche géométrique. *Repères, 17*, 121-139.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna: Peter Lang.

Duval, R. (1996). Quel cognitif Retenir en Didactiques des Mathématiques? *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 16(3),* 349-380.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51). Dordrecht: Kluwer A. P.

Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. Trabajo presentado en la *24ª Conferencia Internacional del Grupo de Psicología en Educación Matemática*. Hiroshima: Japón.

Duval, R. (2003). *Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y... una quinta*. Universidad del Litoral Costa de Opâle.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.* Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives, 10*, 5-53.

Duval, R. (2006a). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques. *RELIME, Número Especial 1*, 45-81.

Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Duval, R. (2006c). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. *Actes du XXXII ème Colloque COPIRELEM*, 67-89.

Duval, R. (2006d). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9(1)*, 143-168.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of the mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in schools,* 137-161. Rotterdam/Tapei: Sense Publishers.

Duval, R. (2008). Eight Problems for a Semiotic Approach in Mathematics Education. En L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education; Epistemology, History, Classroom and Culture,* 39-61. Rotterdam/Tapei: Sense Publishers.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a Matematica de outra forma. (I) Entrar no modo matemacico de pensar: os registros de representatoes semioticas.* Sao Paulo: Proemeidtora.

Duval, R. (2012). Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica. VI Coloquio Internacional Enseñanza de las Matemáticas: *Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales,* 14-17. Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Echenique, I. (2006). *Matemáticas: Resolución de problemas.* Navarra: Departamento de Educación del Gobierno de Navarra.

Edo, M. (2012). Ahí empieza todo. Las matemáticas de cero a tres años. *Números*, 80, 71-84.

Edo, M. y Revelles, S. (2004). Situaciones matemáticas potencialmente significativas. En M. Antón y B. Moll (Coords.), *Educación Infantil. Orientación y recursos (0-6 años)* (pp. 103-179). Barcelona: Praxis.

Edwards, C. P. (2002). Three Approaches from Europe: Waldorf, Montessori, and Reggio Emilia. *Early Childhood Research & Practice*, *4*(1), n1.

Ekinova, H. (2010). Lacunes géométriques des futurs enseignants. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 15*, 97-118.

Fernández, B. y Arias, J. R. (2013). La Expresión Corporal como fuente de aprendizaje de nociones matemáticas espaciales en Educación

Infantil. *Retos. Nuevas Tendencias en Educación Física, Deporte y Recreación*, 24, 158-164.

Fernández-Bravo, J. A. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático en Educación Infantil*. Madrid: Ediciones Pedagógicas.

Fernández-Bravo, J. A. (2007). La mayéutica y el aprendizaje de la probabilidad. *Educación y Futuro: Revista de Investigación Aplicada y Experiencias Educativas*, *17*, 89-103.

Fischer, E. (1990). A Part-Part-Whole Curriculum for Teaching Number in the Kindergarten. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(3), 207-15.

Fuson, K. (1988). *Children´s counting and concepts of number*. Nueva York: Spriger-Verlag.

Fuson, K. (1991). Relations entre comptage et cardinalité chez les enfants de 2 à 8 ans. En J. Bideaud, C. Meljac, y J. P. Fischer, *Les Chemins du Nombre* (pp. 159-179). Presses Universitaires de Lille: Lille.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number, addition and subtraction. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan Library Reference Simon & Schuster Macmillan.

Fuson, K. y Hall, J. (1983). The acquisition of early number word meanings: A conceptual analysis and review. En H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 49-107). New York: Academic Press.

Gálvez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria*. [Tesis Doctoral]. DIECINVESTAV-IPN: México.

García Nieto, N. (1995). El diagnóstico pedagógico en la educación infantil. *Revista Complutense de Educación*, *6*(1), 73-100.

Geary, D. (1996). *Children´s mathematical development*. London: American Psychological Association.

Geary, D. C. (2006). Development of Mathematical Understanding. En W. Damon y R. Lerner (Eds), *Handbook of Child Psychology, 2. Cognition, perception and language* (pp. 777-810). Nueva York: Wiley.

Gelman, R. y Gallistel, C. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge Mass: Harvard University Press.

Giaquinto, M. (2005). Mathematical Activity in Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics. *Springer, 327*, 75-87.

Gifford, S. y Wilson, P. (1995). Number in Early Childhood. Beecholme Nursery Number Project. *Early Child Development and Care*, *109*, 95-132.

Ginsburg, H. y Pappas, S. (2004). SES, Ethnic, and Gender Differences in Young Children's Informal Addition and Subtraction: A Clinical Interview Investigation. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *25(2).*

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 22(2.3),* 237-284.

Godino, J. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Universidad de Granada.

Godino, J. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para maestros.* Granada: Proyecto Edumat-Maestros.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XVI (pp. 49-68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D. (2014). *Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas*. Universidad de Granada. Recuperado de *http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf*

Goig, M. R. (2014) (Coord.). *Formación del profesorado en la sociedad digital. Investigación, innovación y recursos didácticos*. Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Goldschmied, E. (2000). *La educación infantil de 0 a 3 años.* Madrid: Morata.

Gómez-Chacón, I. M. y Kuzniak, A. (2013). Spaces for Geometric Work: Figural, instrumental and discursive geneses of reasoning in a technological environment. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13 (1),* 201-226.

Gómez-Chacón, I. M. y Escribano, J. (2014). Geometric Locus activities in a dynamic geometry system. Non-iconic visualization and instrumental genesis. *RELIME, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática*, *17*(3), 181-196.

Hernández, M. P. (2008). Tareas significativas y recursos en internet. Webquest. *MarcoELE: Revista de Didáctica Español Lengua Extranjera*, 6, 1-25.

Houssaye, J. (1988). *Le triangle pédagogique*. Paris: Lang.

Ibáñez. C. (1992). *El proyecto de Educación Infantil y su práctica en el aula*. Madrid: La Muralla.

Imbernón, F. (1994). *La formación y el desarrollo profesional del profesorado: hacia una nueva cultura profesional.* Barcelona: Graó.

Kaga, Y. (2008). ¿Cómo vincular la atención y educación de la primera infancia y la enseñanza primaria? *Nota de la UNESCO sobre las Políticas de la Primera Infancia, 44*, octubre-diciembre. Disponible en *http://unesdoc.unesco.org/images/0017/001799/179934s.pdf*

Kamii, C. (1984). *El número en la educación preescolar.* Madrid: Aprendizaje-Visor.

Kaput, J. (1987a). Representations Systems and Mathematics. Problems of representation. *The teaching and learning of Mathematics* (pp. 16-26). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Kaput, J. (1987b). Towards a Theory of Symbol Use in Mathematics. Problems of representation. *The teaching and learning of Mathematics* (159-196). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbolic systems of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: MacMillan Publishing Company.

Kaput, J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behaviour*, *17* (2), 266-281.

Koehler, M. J. y Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *9*(1), 60-70.

Kospentaris, G. y Spyrou, P. (2008). Assessing the development of geometrical thinking from the visual towards the analytic-deceptive level. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 13*, 133-157.

Kuzniak, A. (2005). Diversité des mathématiques enseignées «ici et ailleurs»: l'exemple de la géométrie. En Copirelem (Ed.), *Enseigner les mathématiques en France, en Europe et ailleurs* (pp. 47-56). Strasbourg: IREM de Strasbourg.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Eléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 6*(*2*), 167-188.

Kuzniak, A. (2010). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *15*, 75-95.

La Cueva, A. (1997). La evaluacion en la escuela: una ayuda para seguir aprendiendo. *Revista da Faculdade de Educação*, *23*(1-2).

La Cueva, A. (1998). La enseñanza por proyectos: ¿mito o reto? *Revista Iberoamericana de Educación*, *16*, 165-190.

Law, N., Pelgrum, W. J. y Plomp, T. (Eds.). (2008). *Pedagogy and ICT use in schools around the world: Findings from the IEA SITES 2006 study* (Vol. 23). Hong Kong: Springer Science & Business Media.

López, V. (Coord.) (2009). *La Evaluación Formativa y Compartida en Educación Superior*. Madrid: Narcea.

Malaguzzi, L. (2011). *La educación infantil en Reggio Emilia* (3a. ed.). Barcelona: Ediciones Octaedro, S.L.

McKeachie, W. J. (1986). Teaching Tips: A Guidebook for the Beginning College Teacher (8th ed.). Lexington, Massachussetts: DC Heath & Co.

MEC (2007). Orden ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado*, 5, de 5 de enero de 2008.

MEPSYD (2007). *Evaluación de la Educación Infantil en España. Informe del Estudio Piloto 2007*. España: Ministerio de Educación, Política Social y Deporte.

Mialaret, G. (1984) *Las matemáticas: cómo se aprenden, cómo se enseñan. Un texto base para psicólogos, enseñantes y padres*. Madrid: Visor.

Mir, V., Gómez, T., Carreras, Ll., Valentí, M. y Nadal, A. (2005). *Evaluación y postevaluación en educación infantil: cómo evaluar y qué hacer después* (Vol. 53). Madrid: Narcea.

Moreno, M. (2010). Pedagogía Waldorf. *Arteterapia. Papeles de Arteterapia y Educación Artística para la Inclusión Social,* 5, 203-209.

Moyles, J. R. (1990). *El juego en la educación infantil y primaria*. Madrid: Ediciones Morata.

Muñoz, A. y Díaz, M. D. (2009). Metodología por proyectos en el área de conocimiento del medio. *Docencia e Investigación: Revista de la Escuela Universitaria de Magisterio de Toledo*, *34*(19), 101-126.

Naito, M. y Miura, H. (2001). Japanese Children's Numerical Competencies: Age- and Schooling-Related Influences on the Development of Number Concepts and Addition Skills. *Developmental Psychology*, 37(2), 217-30.

National Association for the Education Young Children (NAEYC) y National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (Adopted in 2002; Updated in 2010). *Early Chilhood Mathematics: Promoting Good Beginnings (NAEYC/NCTM Join Position Statement)*. Washington, D.C.: Autores.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*.

National Council of Teachers of Mathematics (2009). *Mathematics in Early Childhood Learning*.

National Joint Committee on Learning Disabilities (1994). *Collective perspectives on issues affecting learning disabilities*. Austin, TX: PRO-ED.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. En *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 115-124).

OECD (2015). *Education at a Glance 2015: OECD Indicators*. OECD Publishing.

Papalia, D.E., Wendkos, S. y Duskin, R. (2005). *Desarrollo humano* (9ª edición). México: McGraw-Hill.

Pérez-Juste, R. (2007). Educación, ciudadanía y convivencia. Diversidad y sentido social de la educación. *Bordón. Revista de Pedagogía*, *59*(2), pp. 239-260.

Piaget, J. (1948). *La representation de l'espace chez l'enfant*. Paris: PUF.

Piaget, J. (1950). *Introduction à l'épistémologie génétique.* Traducción: Introducción a la epistemología genética. México: Paidós.

Piaget, J. (1955). *Psicología de la Inteligencia*. Buenos Aires: Editorial Psique.

Piaget, J. (1968). *La formation du symbole chez l'enfant.* Neuchatel: Editorial Delachaux et Niestlé. Traducción: La formación del símbolo en el niño. México: Editorial Fondo de Cultura Económica.

Piaget, J. (1975). *Lenguaje y pensamiento en el niño*. Buenos Aires: Guadalupe.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1980). *La genése des structures logiques élémentaires. Classifications et seriations.* París: Delachaux et Niestlé.

Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1960). *The child´s conception of geometry*. Londres: Routledge y Kegan Paul.

Piaget, J. y Szeminska, A. (1941). *Le génese du nombre chez I'enfant*. Neuchatel: Delachaux et Niestlé.

Pica, P., Dehaene, S., Izard, V. y Spelke, E. (2008). Comment les nombres se répartissent dans l'espace. *M/S*, *12 (24),* 114-116.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis.

Pujolàs Maset, P. (2012). Aulas inclusivas y aprendizaje cooperativo. *Educatio Siglo XXI*, *30*(1), pp. 89-112.

Radford, L. (1998). On Signs and Representations. A Cultural Account. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 35(1)*, 277-302.

Radford, L. (2004a). *Semiótica cultural y cognición*. Conferencia dictada en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Tuxtla, Chiapas México. Recuperado de *http://laurentian.ca/educ/lradford/Tuxtla3.pdf*.

Radford L. (2004b). *The Cultural-Epistomological Conditions of the Emergence of Algebraic Symbolism.* Plenary Lecture presented at the 2004 History and Pedagogy of Mathematics Conference, Uppsala, Sweden. Recuperado de *http://laurentian.ca/educ/lradford/PUBLIC.HTML*

Radford, L. (2004c). Del símbolo y de su objeto. Reflexiones en torno a la teoría de la conceptualización de Cassirer. *RELIME*, *7(2)*, 157-170.
Radford, L. (2006a). Semiótica y educación matemática: introducción. *RELIME, Número Especial 1*, 7-22.
Radford, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *RELIME*, *Número Especial 1*, 103-129.
Radford, L. (2008). Diagrammatic thinking: Notes on Peirce's semiotics and epistemology. *PNA*, *3(1),* 1-18.
Radford, L. (2009). Astrazione e generalità matematica: alcune considerazioni semiotiche [Abstraction and mathematical generality: some semiotic remarks]. En B. D'Amore (Ed.), *Matematica, stupore e poesia [Mathematics, wonder and poetry]* (146-154). Firenze: Giunti.
Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage: la théorie de l'objectivation. *Éléments*, *1*, 1-27.
Radford, L. (2013). On semiotics and education. *Éducation et Didactique*, *7(1),* 185-204.
Radford, L. (2014a). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 85, 405-422.
Radford, L. (2014b). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7(2)*, 132-150.
Reyes, M. C. (2011). *El rendimiento académico de los alumnos de primaria que cursan estudios artísticos-musicales en la Comunidad Valenciana*. [Tesis Doctoral] Departamento de Filosofía, Universidad de Valencia.
Rueda, M. (2009). La evaluación del desempeño docente: consideraciones desde el enfoque por competencias. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *11*(2), 1-16.
Rico, L. (1996) Pensamiento Numérico. En F. Hitt (edit.), Investigaciones en Educación Matemática. XX Aniversario del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN (pp. 27-54). México: Grupo Editorial Iberoamericano.
Rico, L. (1997). *Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria.* Madrid: Síntesis.

Ruiz-Higueras, L. y García, F. J. (2011). Analysis of didactic praxeologies in the management of mathematical modeling processes in childhood education. *Revista Latinoamericana de Investigación en matemática educativa*, *14*(1), 41-70.

Sáez, J. M. (2005). *Modelo de evaluación para la Educación Infantil*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo.

Saint-Onge, M. (1997). *Yo explico, pero ellos… ¿aprenden?* México: Mensajero.

Sarlé, P. (2008) (Coord.). *Enseñar en clave de juego*. Buenos Aires: Noveduc Libros.

Santaló, L. (1975). *La educación matemática, hoy.* Barcelona: Teide.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Stiggins, R. J., y Duke, D. (*1988*). *The case for commitment to teacher growth research on teacher evaluation*. New York: State University of New York Press.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *RELIME, 10(2)*, 275-300.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Treffers, A. (2009). Mathe-didactical reflections on young children's understanding and application of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning, 11(1-2)*, 102-112.

Vecchi, V. (2013). *Arte y creatividad en Reggio Emilia: el papel de los talleres en la educación infantil y sus posibilidades*. Madrid: Ediciones Morata.

Vecino, F. (2001). La enseñanza de la geometría en la Educación Primaria. En M. C. C. Chamorro (Coord.). *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: M.E.C.D.

Vigotsky, L. (1930). *La imaginación y el arte en la infancia.* Madrid: Ediciones Akal.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, *358*, 749-750.

Zur, O. y Gelman, R. (2004). Young Children Can Add and Subtract by Predicting and Checking. *Early Childhood Research Quarterly*, *19(1),* 121-137.

UNIR EDITORIAL

Aprender para enseñar es la premisa fundamental de este manual que, lejos de pretender erigirse en un tratado de educación lleno de dogmas metodológicos o de teorías de aprendizaje, quiere dar pautas a los maestros de Educación Infantil para que enseñen las matemáticas en una etapa en que esta materia parece desdibujarse entre el resto de áreas curriculares.

El libro consta de dos partes: la primera, «Desarrollo del pensamiento matemático», se ocupa de cómo aprendemos y analiza las principales corrientes de enseñanza de las matemáticas que existen para estas edades tempranas; la segunda, «Consideraciones didácticas y metodológicas», se dedica a la acción en el aula o en el marco de cualquier situación de aprendizaje.

La propuesta de los autores parte de la necesidad de aportar al niño herramientas que faciliten su comprensión del entorno. No hay dos estudiantes iguales, por lo que el educador debe procurar adaptar los contenidos, el entorno, las herramientas y los métodos a cada uno de los niños que están en el aula, atendiendo a su singularidad y a sus capacidades innatas.

Desde el respeto al crecimiento personal de los niños, la escuela debe procurar despertar en ellos la necesidad de investigar, de conocer, de descubrir, de imaginar, de buscar... La acción práctica y el propio ejemplo del maestro es la mejor manera de conseguirlo.

unir editorial

9 788416 602216